Διαφορική Γεωμετρία - Θέματα Φεβρουαρίου 2017

1.

i. Αποδείξατε ότι οι κανονικές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ των οποίων όλες οι εφαπτομένες ευθείες είναι παράλληλες προς σταθερή διεύθυνση είναι ευθείες (ή τμήματα ευθειών).

ii. Δίδεται καμπύλη $c : I \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Υποθέτουμε ότι η c είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης με διεύθυνση το μοναδιαίο διάνυσμα w και κλίση $\varphi \in (0, \pi/2)$. Θεωρούμε τη καμπύλη

$$\tilde{c}(s) = c(s) - (s\cos\varphi)w \quad , \ s \in I$$

Αποδείξατε ότι η $\tilde{c}$ είναι κανονική με καμπυλότητα $\tilde{k} = \dfrac{k}{(\sin\varphi)^2}$. Εν συνεχεία να βρεθεί το πλαίσιο Frenet και αποδείξατε ότι η $\tilde{c}$ είναι επίπεδη.

2.

i. Έστω $c(s)$ επιφανειακή καμπύλη κανονικής επιφάνειας S με παράμετρο το μήκους τόξου $s \in I$. Αποδείξατε ότι η κάθετη καμπυλότητα της S στην εφαπτομενική διεύθυνση της c είναι

$$k_n\left(\dot{c}(s)\right) = \left\langle \left(N \circ c\right)(s), \ddot{c}(s) \right\rangle$$

όπου N η απεικόνιση Gauss της S.

ii. Αποδείξατε ότι αν από σημείο p κανονικής επιφάνειας S διέρχονται τρεις διακεκριμένες ευθείες που περιέχονται στην S, τότε το p είναι ισόπεδο σημείο.

iii. Δίδονται οι επιφάνειες S_1 και S_2 με εξισώσεις $x^2 + y^2 = z$ και $x^2 - 3z^2 = y$ αντίστοιχα. Αποδείξατε ότι οι επιφάνειες είναι κανονικές και εξετάσατε αν είναι ισοπεριμετρικές.

3i. Δίδεται κανονική επιφάνεια S και $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες και ασυμπτωτικές καμπύλες τέμνονται υπό σταθερή γωνία. Αποδείξατε ότι η μέση καμπυλότητα και η καμπυλότητα Gauss πληρούν τη σχέση $H^2 = aK$ όπου a κατάλληλη σταθερά.

ii. Έστω η επιφάνεια

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y^2 \ , \ y > 0\right\}$$

Αποδείξατε ότι είναι κανονική. Να βρεθεί η απεικόνιση Gauss και για αυτή να δειχθεί ότι είναι $1-1$ και να βρεθεί η εικόνα της. Τέλος να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων. Είναι η επιφάνεια αναπτυκτή ;

4i. Έστω καμπύλη c με φυσική παράμετρο η οποία ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα με κέντρο $(0,0,0)$. Θεωρούμε και την επιφάνεια $X(s, v) = v \cdot c(s)$ όπου $v \in (0, +\infty)$.

a. Να δειχθεί ότι η επιφάνεια είναι κανονική.

b. Να δειχθεί ότι $H_p = -\dfrac{\kappa(s)}{2v}\left\langle (\mathbf{c}(s)\, , \, \mathbf{b}(s)\right\rangle$.

c. Έχει η επιφάνεια ομφαλικά σημεία;

d. Να δειχθεί ότι η $X(s, v)$ είναι ελαχιστική αν και μόνο αν η $c(s)$ είναι ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας.